O problemie poprawnego postawienia zagadnień brzegowych i początkowych w przestrzeniach Sobolewa oraz Orlicza-Sobolewa wyposażonych w wagi

Agnieszka Kałamajska
Uniwersytet Warszawski oraz
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk o.w. Warszawie

Centrum zastosowań matematyki,
Będlewo, 25–30 maja 2015

1 Motywacja - równania zdegenerowane

1.1 Linowe równania cząstkowe

Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\rho(x)\nabla u(x)) = f & \text{in} \quad \Omega \\ u = g & \text{in} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Załóżmy że

$$g \in Y$$

Y jest pewną funkcją zadaną na brzegu zbioru Ω.
Załóżmy że istnieje ograniczony operator przedłużania:

$$Ext : Y \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega).$$

Wówczas istnieje $\Psi_g \in W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$ taka że $\Psi_g|_{\partial\Omega} = g$.

Podstawmy: $v := u - \Psi_g$, oznaczmy
$W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)$ - uzupełnienie $C^{\infty}_0(\Omega)$ w $W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$.

Problem jest równoważny:

$$\begin{cases} Pv = f - P\Psi_g & \text{in} \quad \Omega \\ \quad v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $Pw = -\mathrm{div}\,(\rho\nabla w)$.

- rozważmy przestrzeń Hilberta $H = W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)$,
- i niech $f \in H^*$.

Prosta obserwacja pokazuje: $P\Psi_g \in H^*$ oraz (2) jest równoważne

$$\begin{cases} Pv = F & \text{in} \quad \Omega \\ \quad v & \in \quad H, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $F = f - P\Psi_g \in H^*$.

Przy odpowiednich założeniach na dopuszczalną wagę ρ można wykazać istnienie na przykład metodami twierdzenia Laksa Milgrama. Istnieje zatem rozwiązanie równania (1) a warunek brzegowy interpretujemy jako $u - \Psi_g \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)$.

1.2 Nieliniowe równania eliptyczne zdegenerowane

Rozważmy bardziej ogólne równanie

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\rho(x)B(\nabla u(x))) = f & \text{w} \quad \Omega \\ u = g & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

- równanie (4) można potraktować jako równanie punktu krytycznego funkcjonału energii o postaci ogólnej

  $$\begin{cases} E(u) := \int_\Omega A(\nabla u)\rho(x)dx \\ u = g \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$$

  gdzie $B = \nabla A$.

- Gdy $g \in Y$, potrzebujemy operatora przedłużania:

  $$Ext : Y \to W^{1,A}_\rho(\Omega).$$

  gdzie $W^{1,A}_\rho(\Omega)$ jest odpowiednio dobraną przestrzenią Orlicza-Sobolewa i dowodzimy istnienia rozwiązań w przestrzeni $W^{1,A}_\rho(\Omega)$

Pytanie główne: Jak dobrać przestrzeń Y?

2 Przestrzenie Besowa-Slobodeckiego. Klasyczna definicja i jej rola

Przestrzenie wprowadzone zostały przez Aronszajna (1955), Slobodetskiego (1958) i Gagliardo (1957).

Definicja 1 *Niech* $k > 0, k \notin \mathbf{N}$, $\lambda = k - [k]$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *będzie otwartym zbiorem. Funkcja* $u : \Omega \to \mathbf{R}$ *należy do przestrzeni Slobodetskiego* $W^{k,p}(\Omega)$ *jeśli* $u \in W^{[k],p}(\Omega)$ *oraz*

$$\mathcal{N}_{\alpha,k,p} := \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\lambda}} dx\, dy < \infty,$$

dla $|\alpha| = [k]$.
Jest to przestrzeń Banacha z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{W^{[k],p}(\Omega)} + \sum_{\alpha, |\alpha|=[k]} \mathcal{N}_{\alpha,k,p}^{\frac{1}{p}}(u).$$

Przykład 1 Gdy $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $k = 1 - \frac{1}{p}$ mamy $[k] = 0$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ when $u \in L^p(\Omega)$ oraz

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{p+n-1}} dx\, dy$$
$$= \int_\Omega \int_\Omega \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} \right)^p \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dx\, dy < \infty.$$

Powyższa przestrzeń odgrywa rolę w twierdzeniu o śladzie.

Gdy $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ jest obszarem o brzegu Lipschitzowskim:
$u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ gdy $u \in L^p(\partial\Omega)$ oraz

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} \right)^p \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \sigma(dx)\, \sigma(dy) < \infty$$

gdzie σ jest $n-1$-wymiarową miarą Hausdorffa na $\partial\Omega$.

Twierdzenie 1 *Jeśli* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *jest ograniczonym obszarem o brzegu Lipschitzowskim,* $p > 1$, $r = 1 - \frac{1}{p}$ *wówczas mamy*

i)(twierdzenie o zanurzaniu)

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{r,p}(\partial\Omega), \tag{5}$$
$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{r,p}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)};$$

ii)(twierdzenie o przedłużaniu)

Dowolna funkcja $u \in W^{r,p}(\partial\Omega)$ *może być przedłużona do* $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ *w taki sposób że*

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega} = u.$$

- pojęcie (5) oznacza że gdy $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ oraz $u_n \to u$ w $W^{1,p}(\Omega)$ wówczas $\{u_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $W^{r,p}(\partial\Omega)$, zatem

  $$u_k \to v \text{ w } W^{r,p}(\partial\Omega)$$

  dla pewnego v. Definiujemy

  $$Tr(u) =: v \, (\text{“} = u|''_{\partial\Omega}).$$

  Granica nie zależy od wyboru ciągu $\{u_m\}$.

- warunek ii) oznacza $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ and $Tr(\tilde{u}) = u$.

Uwaga 1 (podejście nieprawidłowe)
Niech $\Omega = [0,1]^{n-1} \times (0,1) =: Q' \times (0,1)$, $k = 1$ i $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(Q')$. Nie możemy przedłużyć u wzorem

$$\tilde{u}(x,t) = u(x), \quad x \in Q, t \in (0,1)$$

gdyż zwykle $|\nabla_x \tilde{u}| \notin L^p(\Omega)$, czyli $\tilde{u} \notin W^{1,p}(\Omega)$.

3 Wariant w przestrzeniach Orlicza - przedstawienie problemu i znane wyniki

3.1 Przestrzeń Orlicza

Funkcję $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazywamy *funkcją Orlicza* gdy jest niemalejąca, wypukła oraz $\Psi(0) = 0$ i $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty$. Przestrzeń

$$L^{\Psi}_{\rho}(\Omega) := \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \int_\Omega \Psi(s|f(x)|)\,\rho(x)dx < \infty \text{ dla pewnego } s > 0\}$$

nazywamy *przestrzenią Orlicza*. Jest to przestrzeń Banacha z normą Luxemburga:

$$\|f\|_{L^{\Psi}_{\rho}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\rho(x)dx \le 1\}.$$

- gdy $\Psi(\lambda) = \lambda^p$ i $p > 1$, wówczas $L^{\Psi}_{\rho}(\Omega) = L^{p}_{\rho}(\Omega)$,
- piszemy: $\Psi \in \Delta_2$ jeśli spełniony jest warunek Δ_2: $\Psi(2\lambda) \leq C\Psi(\lambda)$, dla dowolnego $\lambda > 0$, ze stałą C niezależną od λ.
- stosujemy notację: $\Psi \in \Delta_2^c$ jeśli transformata Legendre'a funkcji Ψ, tzn. $\Psi^*(s) := \sup_{t>0}\{st - \Psi(t)\}$, spełnia warunek Δ_2.

3.2 Przestrzeń Orlicza-Sobolewa

Zakładamy że:

- $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ to otwarty ograniczony podzbiór,
- $\Psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją Orlicza.

Definicja 2 *Niech $k \in \mathbf{N}$. Przestrzenią Orlicza $W_\rho^{k,\Psi}(\Omega)$ zbędziemy nazywać zbiór liniowy*

$$\{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \\ D^\alpha u \in L_\rho^\Psi(\Omega) \text{ dla dowolnego } \alpha : |\alpha| \leq k\},$$

wyposażony w normę:

$$\|u\|_{W_\rho^{k,\Psi}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\rho^\Psi(\Omega)}.$$

3.3 Przestrzenie Orlicza-Slobodetskiego

Zakładamy że:

- $\Psi, \Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ to dwie zadane funkcje Orlicza,
- $\omega(|x - y|)$ jest zadaną wagą.

Definicja 3 *Symbolem* $Y_\omega^{\Psi,\Phi}(\Omega)$ *będziemy oznaczań przestrzeń liniową rozpiętą przez funkcje* $u \in L^\Psi(\Omega)$, *dla których funkcja modularna*

$$I_\omega^\Phi(u,\Omega) := \int_\Omega \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right) \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{n-1}}\, dxdy \quad (6)$$

jest skończona.
Wyposażamy $Y_\omega^{\Psi,\Phi}(\Omega)$ *w normę*

$$\|u\|_{Y_\omega^{\Psi,\Phi}(\Omega)} := \|u\|_{L^\Psi(\Omega)} + J_\omega^\Phi(u,\Omega),$$

gdzie

$$J_\omega^\Phi(u,\Omega) := \inf\left\{\lambda > 0 : I_\omega^\Phi\left(\frac{u}{\lambda},\Omega\right) \le 1\right\} \quad (7)$$

jest półnormą Luxemburga generowaną przez $I_\omega^\Phi(u,\Omega)$.

- Wzorem $Y^{\Psi,\Phi}_{\omega,L}(\Omega)$ oznaczymy uzupełnienie zbioru

$$\{u \in Lip(\bar{\Omega}) \cap Y^{\Psi,\Phi}_{\omega}(\Omega)\} \tag{8}$$

w normie $\|u\|_{Y^{\Psi,\Phi}_{\omega}(\Omega)}$.

- Można także zdefiniować $Y^{\Psi,\Phi}_{\omega}(\partial\Omega)$ gdzie $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ jest zbiorem Lipschitzowskim. Wówczas zamiast "dx'' rozważamy miarę $\sigma(dx)$- $n-1$-wymiarową miarę Hausdorffa zadaną na $\partial\Omega$:

$$I^{\Phi}(u, \partial\Omega) :=$$
$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \Phi\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}}\,\sigma(dx)\sigma(dy)$$

Przykład 2

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie obszarem z brzegiem Lipschitzowskim, $\omega \equiv 1$, $\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) = |\lambda|^p$, $1 < p < \infty$. Wówczas

$$\|u\|_{Y^{\Psi,\Phi}(\partial\Omega)} \sim$$

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{p+n-2}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jest to norma u w przestrzeni Slobodetskiego $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

Przykład 3 Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R^n}$ będzie obszarem z brzegiem klasy $\mathcal{C}^{0,1}$ i ω będzie wagą zadaną na $\partial\Omega \times \partial\Omega$ powiązaną z $2n-2$ wymiarową miarą Hausdorffa. Przestrzeń $W_\omega^{1/2,2}(\partial\Omega)$ składa się z funkcji mierzalnych zadanych na $\partial\Omega$ dla których norma

$$\|u\|_{W_w^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)^2 \frac{\omega(x,y)}{|x-y|^{n-2}} d\sigma(x)d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega}|u(x)|^2 d\sigma(x)$$

jest skończona.

Notacja: gdy $\omega \equiv 1$ pomijamy ω w oznaczeniach.

3.4 Obcięcie i rozszerzenie. Wyniki w ujęciu Orliczowskim

A. Fougeres (1972), M-T. Lacroix (1974), G. Palmieri (1979):

Twierdzenie 2 *Gdy Φ jest N-funkcją oraz obie funkcje Φ i Φ^* spełniają warunek Δ_2, wówczas:*

i)(obcięcie)

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \subseteq Y_L^{\Phi,\Phi}(\partial\Omega)$$

i zanurzenie jest ciągłe;

ii) (przedłużenie) *Powyższy operator obcięcia jest surjekcją.*

Powstaje pytanie: Co można powiedzieć jeśli osłabimy założenia:

- $\Phi \in \Delta_2, \Phi^* \in \Delta_2$.

Wyniki powiązane z powyższym pytaniem:

- A. Cianchi (2010): rozważane są zanurzenia postaci
$$W^{k,A}(\Omega) \subseteq L^B(\partial\Omega)$$
gdzie $k \in \mathbf{N}$, zawierające funkcje Orlicza A, B i znaleziona jest charakteryzacja dopuszczalnych par A, B;

- A. Nekvinda, L. Pick (1992): znaleziona jest charakteryzacja przestrzeni śladów w przestrzeniach Sobolewa z wagami $H^{1,p}(\Omega, d_M^\epsilon)$ na zbiorze (rozmaitości) M, $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha$;

- M. Mitrei, M. Taylor (2006): rozważany jest problem Poissona: $\Delta u - Vu = F$, z przestrzenią śladów w przestrzeni Besowa, $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha$.

4 Twierdzenie o śladzie

4.1 Dopuszczalne przestrzenie

Założenie A (pary Kity, pomijamy szczegóły) Kita w latach 90'tych ubiegłego stulecia wprowadził pewne warunki wiążące funkcje Orlicza Ψ, Φ na użytek nierówności typu Steina:

$$\Phi(t) := \int_0^t a(s)\,ds \quad \text{and} \quad \Psi(t) := \int_0^t b(s)\,ds, \;\; t \geq 0.$$

gdzie a,b spełniają pewne warunki zgodności.

Uwaga 2

- Zachodzi inkluzja $\Phi(t) \leq \widetilde{C}\Psi(C_1 t)$, za stałymi niezależnymi od t, w szczególności $\Phi \prec \Psi$.
- Następujęce warunki są równoważne :
  a) $\Psi \in \Delta_2^c$
  b) Φ i Ψ są równoważnymi funkcjami Orlicza,
  c) $\Phi \in \Delta_2^c$.

Przykład 4 *Pary:* $\Phi(\lambda) = \lambda(2+\lambda)^\alpha$, $\Psi(\lambda) = \lambda(2+\lambda)^{1+\alpha}$ *oraz* $\Phi(\lambda) = \lambda^p, \Psi(\lambda) = \lambda^p$, *spełniają Założenie A.*

4.2 Twierdzenie o śladzie (ujęcie bez wag)

Twierdzenie 3 (M. Krbec, A.K.)
Niech (Ψ, Φ) *będzie parą Kity oraz* Ω *będzie ograniczonym obszarem z brzegiem Lipschitzowskim. Wówczas dobrze zdefiniowany jest operator śladu* $Tr : W_L^{1,\Psi}(\Omega) \mapsto Y_L^{\Psi,\Phi}(\partial\Omega)$ *oraz istnieje stała* D *taka że dla dowolnej funkcji* $u \in W_L^{1,\Psi}(\Omega)$ *mamy*

$$\| Tru \|_{Y^{\Psi,\Phi}(\partial\Omega)} \leq D \| u \|_{W^{1,\Psi}(\Omega)}. \tag{9}$$

Pytanie otwarte: Czy powyższy operator śladu jest surjekcją?

5 Operator przedłużania

Redukcja do problemu na kostce

Niech

- $Q^{'} = [-1/2, 1/2]^{n-1} \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ będzie kostką
- $u \in C_0^\infty(Q^{'})$.

Problem: Znaleźć przedłużenie u do $\tilde{u} : Q = Q^{'} \times [0,1] \to \mathbf{R}$ w taki sposób że

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,\Psi}(Q)} \leq C\|u\|_{Y^{\Psi,\Phi}(Q')}.$$

5.1 Przedłużenie cieplne (wyniki wspólne z Miroslavem Krbecem)

Przedstawiamy konstrukcję dla przypadku $\Omega = Q = [-1/2, 1/2]^{n-1} \times (0,1) =: Q' \times (0,1)$, przy założeniu $u \in C_0^\infty(Q')$. Niech

$$\begin{aligned} \widetilde{E}(s,t) &:= \frac{1}{2^{n-1}(\pi t)^{(n-1)/2}} \exp(-s^2/4t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad s \geq 0, t > 0, \\ E(x,t) &:= \widetilde{E}(|x|,t), \ x \in \mathbf{R}^{n-1}, \ t > 0, \end{aligned}$$

będzie jądrem przewodnictwa cieplnego.
Zachodzą własności:

1.

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} E(x,t)\,dx = 1 \text{ dla każdego } t > 0,$$

2.

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \phi(x) E(x,t)\,dx = \phi(0)$$
$$\text{dla każdego } \phi \in C_0^1(\mathbf{R}^{n-1}),$$

3.

$$E_t(x,t) = \Delta_x E(x,t).$$

Definiujemy

$$\widetilde{u}(x,t) = (e^{-t\Delta}u)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} u(y)E(x-y,t)\,dy = (E(\cdot,t) * u)(x) & t > 0, \\ u(x) & t = 0. \end{cases}$$

Lemat 1 *Dla dowolnego* $u \in C_0^\infty(Q')$ *mamy* $Tr\widetilde{u} = u$.

5.2 Oszacowania na funkcję $\tilde{u}$

Założenie B:

1. $R(\lambda) = \lambda P(\lambda)$, gdzie $P(ab) \prec 1 + P(a) + P(b)$,

2. P jest niemalejąca,

3. Funkcja $\frac{P(\lambda)}{\lambda}$ jest nierosnąca dla dużych argumentów.

Przykład 5

$$R(\lambda) = \lambda(\log(2+\lambda))^{\alpha}, \quad \alpha > 0$$

spełnia założenie B.

Twierdzenie 4 *Dla dowolnej liczby* $\lambda > 0$ *i dowolnej funkcji wypukłej* $R : [0,\infty) \to [0,\infty)$, *mamy*

i)

$$\int_Q R\left(\frac{|\widetilde{u}(x',t)|}{\lambda}\right) dx'\,dt \le \int_{\mathbf{R^{n-1}}} R\left(\frac{|u(x')|}{\lambda}\right) dx'.$$

ii)

$$\int_{Q'}\int_{(0,1)} R\left(|\nabla_x \widetilde{u}|\right) dxdt \prec \int_{Q'}\int_{Q'} R\left(\frac{C_1|u(y)-u(x)|}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^{n-3}}\,dxdy + \int_{Q'} R\left(C_2|u(x)|\right) dx,$$

ii) *Jeśli* R *spełnia Założenie B, wówczas*

$$\int_{Q'}\int_{(0,1)} R\left(|\partial_t \widetilde{u}(x,t)|\right) dxdt \preceq 1 + \int_{Q'}\int_{Q'} R\left(\frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dxdy + \int_{Q'} R\left(|u(x)|\right) dx.$$

Główne narzędzie: Oszacowania punktowe.

Lemat 2 (oszacowania punktowe)
Niech $n \geq 2$,

$$P(|z|,t) \;=E(z,t)\tfrac{|z|^2}{4t}, \text{ when } z \in \mathbf{R^{n-1}}.$$

Wówczas dla dowolnej funkcji u *o zwartym nośniku w* $Q^{'}$, *Lipschitzowskiej i takiej że* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial Q') \geq \varepsilon$ *mamy*

$$\left|\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_k}(x,t)\right| \;\leq\; \int_{Q'} P(|x-y|,t)\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right) dy \;+\; |u(x)|.$$

Podobne oszacowania zachodzą dla $\tilde{u}_t$.

Wyniki powiązane (dla równania przewodnictwa)

- podejście w przestrzeniach Besowa (bez wag): Xu, Zajączkowski i Zedrzyńska.
- w teorii prawdopodobieństwa (ujęcie na rozmaitościach, fraktalach, w przestrzeniach metrycznych): P. Ausher, T. Culhon, X.T. Duong, S. Hofman, A. Sikora, N. Dungey, A. Grigor'yan, J. Hu, K.-S. Lau, E.-M. Ouhabaz, A. Raich.
- w przestrzeniach Orlicza: Yu. V. Kozachenko and K. J. Veresh (z warunkiem początkowym w przestrzeni Orlicza, rozwiązanie w postaci szeregu).

6 Przedłużenie splotowe (prace wspólne z Rajem Narayanem Dhara)

Metoda klasyczna: Rozważamy regularyzację poprzez operator splotu: $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $\int \phi = 1$, supp$\phi \subseteq Q^{'}$ i definiujemy

$$\tilde{u}(x,\epsilon) := (u * \phi_\epsilon)(x),\ x \in Q^{'}, \epsilon \in (0,1).$$

Obserwacja: gdy $\epsilon \to 0$ mamy:
$\tilde{u}(x,\epsilon) \to u(x)$.

Twierdzenie 5 *Załóżmy że* Ψ *jest funkcją Orlicza,* Ω *jest obszarem z brzegiem klasy* $\mathcal{C}^{0,1}$, $\rho(x) = \tau\left(\mathrm{dist}\left(x, \partial\Omega\right)\right)$, $\omega(x,y) = \tau(|x-y|) = \tau(\mathrm{dist}(x,y))$, τ *jest ciągłą, monotoniczną funkcją spełniającą*
Warunek C: zachodzi i) lub ii) dla małych argumentów:

i) τ *jest niemalejące, spełnia warunek* Δ_2 *oraz* $s\tau^{'}(s) \leq F \cdot \tau(s)$ *gdzie* $\frac{F}{n-1} < 1$*;*

ii) τ *jest nierosnąca, spełna warunek* $\Delta_{\frac{1}{2}}$, *tzn.* $\tau(\frac{1}{2}s) < C\tau(s)$, *ze stałą* C *niezależną od* s.

Niech $u : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ *będzie Lipschitzowska. Wówczas istnieje funkcja Lipschitzowska* $\widetilde{u} : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ *taka że* $\tilde{u} = u$ *na* $\partial\Omega$ *oraz dla każdego* $\lambda > 0$ *mamy*

$$\int_\Omega \Psi\left(\frac{|\widetilde{u}(x)|}{\lambda}\right)\tau(\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))\,dx \prec \int_{\partial\Omega}\Psi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)d\sigma(x),$$

$$\int_\Omega \Psi\left(\frac{|\nabla\widetilde{u}(x)|}{\lambda}\right)\tau(\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))\,dx \prec \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\Psi\left(\frac{B}{\lambda}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right)\frac{\tau(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}}d\sigma(x)d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega}\Psi\left(\frac{D}{\lambda}|u(x)|\right)d\sigma(x),$$

W szczególności

$$\|\widetilde{u}\|_{L^\Psi_\rho(\Omega)} \prec \|u\|_{L^\Psi(\partial\Omega)}, \tag{10}$$

$$\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^\Psi_\rho(\Omega)} \prec \|u\|_{Y^{\Psi,\Psi}_\omega(\partial\Omega)}. \tag{11}$$

Przykład 6
Przykłady dopuszczalnych funkcji:

1. $\tau \equiv 1$;
2. $\tau(t) = t^{\alpha}$, $-1 < \alpha < n-1$;
3. $\tau(t) = t^{\alpha}\left(\ln\left(2+\frac{1}{t}\right)\right)^{\beta}$, $-1 < \alpha < n-1, \beta > 0$;
4. $\tau(t) = (\log(2+\frac{1}{t}))^{-\alpha}, \alpha > 0$;
5. $\tau(t) = 1 - e^{\alpha t}$, $\alpha < 0$, $n > 2$.

- Dla $\tau \equiv 1$ odtwarzamy twierdzenie Lacroix o przedłużaniu w ujęciu bez wag zachodzące dla dowolnej funkcji Orlicza Ψ.
- Twierdzenie było znane wcześniej dla wag potęgowych (Kufner, Nekvinda, Pick, Mitrei, Taylor), częściowe wyniki znane wcześniej: Vasarin (1957), Kudryavcev (1959), Lizorkin (1960), Uspenski (1960), Nečas (1962), Portnov (1964).
- wagi są niezależne od Ψ.

Problem otwarty: Twierdzenia o zanurzaniu w ujęciu z wagami.

7 Problem interpretacji warunków brzegowych

Rozważmy dla uproszczenia przestrzenie $X = W^{1/2,2}_{\omega}(\partial\Omega)$ and $Y = W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$.

Definicja 4 (operator przedłużania) Niech $\Omega \in \mathbf{R}^n$ będzie obszarem z brzegiem Lipschitzowskim oraz $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \cap B_2(\Omega)$ (waga typu B_2-pomijamy definicję). Operator liniowy ciągły:

$$Ext : W^{1/2,2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$$

nazwiemy operatorem przedłużania jeśli Ext przedłuża każdą funkcję Lipschitzowską zadaną na $\partial\Omega$ do funkcji Lipschitzowskiej zadanej na $\bar{\Omega}$.

Twierdzenie 6
Załóżmy że $\Omega \subseteq \mathbf{R^n}$ jest ograniczonym obszarem z brzegiem klasy $\mathcal{C}^{0,1}$, $\rho(x) = \tau\left(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right) \in L^1(\Omega) \cap B_2(\Omega)$, $\omega(x,y) = \tau(|x-y|)$ oraz $\tau : (0,\infty) \to \mathbf{R}_+$ spełnia Warunek C.

Wówczas istnieje operator przedłużania $Ext : W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$, co więcej, mamy

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}\|_{L^2_\rho(\Omega)} &\leq C_3 \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}, \\ \|\widetilde{u}\|_{W^{1,2}_\rho(\Omega)} &\leq C_5 \|u\|_{W^{\frac{1}{2},2}_\omega(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Interpretacja warunku brzegowego

Definicja 5

Niech $u \in W^{1,2}_{\rho}(\Omega), g \in W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega)$ i spełnione będą założenia Twierdzenia 6. Powiemy że $u = g$ on $\partial\Omega$ jeśli

$$u - Ext(g) \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega).$$

Pytanie: Czy powyższa definicja jest niezależna od wyboru operatora przedłużania $Ext : W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$? Załóżmy że $Ext_1, Ext_2 : W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$ to dane dwa operatory przedłużania.

$$Y_1 := \left\{u \in W^{1,2}_{\rho}(\Omega) : u - Ext_1 g \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)\right\},$$
$$Y_2 := \left\{u \in W^{1,2}_{\rho}(\Omega) : u - Ext_2 g \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)\right\},$$

Pytamy czy $Y_1 = Y_2$, równoważnie czy $Ext_1 - Ext_2 \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega)$?

Twierdzenie 7 (R.N. Dhara, A.K.)
Załóżmy że $\Omega \subseteq \mathbf{R^n}$ *jest ograniczonym obszarem z brzegiem klasy* $\mathcal{C}^{0,1}$,
$\rho(x) = \tau\left(\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)\right) \in B_2(\Omega) \cap L^1(\Omega)$,
$\omega(x,y) = \tau(|x-y|)$ *i* $\tau : (0,\infty) \to \mathbf{R}_+$ *spełnia Warunek C.*
Wówczas istnieje operator
$Ext : W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$. *Co więcej, jeśli* $Ext_1 : W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega) \to W^{1,p}_{\rho}(\Omega)$ *jest innym operatorem przedłużania, wówczas*

$$u - Ext(g) \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega) \Leftrightarrow u - Ext_1(g) \in W^{1,2}_{\rho,0}(\Omega).$$

W szczególności interpretacja warunku brzegowego $u = g$ on $\partial\Omega$ *jest niezależna od wyboru operatora przedłużania pomiędzy przestrzeniami* $W^{\frac{1}{2},2}_{\omega,L}(\partial\Omega)$ *i* $W^{1,2}_{\rho}(\Omega)$.

References

[1] R. N. DHARA, A. KAŁAMAJSKA, *On one extension theorem dealing with weighted Orlicz-Slobodetskii space. Analysis on cube,* Mathematical Inequalities & Applications, **18**(1) (2015), 61–89.

[2] R. N. DHARA, A. KAŁAMAJSKA, *On one extension theorem dealing with weighted Orlicz-Slobodetskii space. Analysis on Lipschitz subgraph and Lipschitz domain,* http://www.mimuw.edu.pl/badania/preprinty/preprinty-imat/?LANG=en

[3] R. N. DHARA, A. KAŁAMAJSKA, *On proper formulation of boundary condition for degenerated PDEs when trace embedding theorems are missing*, preprint.

[4] A. KAŁAMAJSKA, M. KRBEC, *Traces of Orlicz-Sobolev functions under general growth restrictions*, Math Nachr. 286 (7) (2013), 730–742.

[5] A. KAŁAMAJSKA, M. KRBEC, *On solutions to heat equation with the initial condition in Orlicz-Slobodetskii space*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 144 (2014), no. 4, 787–807.

[6] . KAŁAMAJSKA, M. KRBEC, *Well posedness and regularity for heat equation with the initial condition in weighted Orlicz-Slobodetskii space subordinated to Orlicz space like $L(LogL)^{\alpha}$ and the logarithmic weight*, praca przyjęta do Revista Matemática Complutense.